بسم الله الرحمن الرحیم

حل المسائل ریاضی هشتم فصل ۵

تهیه شده در حوزه دانش آموزی (نخبگان دین و دانش)

hodun.ir

باسمه تعالی

بردار:

بردار ، خط راست جهت داری است که برای نام گذاری بردار از حروف کوچک انگلیسی استفاده می شود

مثال بردار a = $\vec{a}$ و بردار b= $\vec{b}$.

برای هر بردار دو مختصه یا دو مولفه طول و عرض نیاز می باشد

مختصه اول (مولفه اول) هر بردار، مختصه طول (جهت افقی) است و مختصه دوم (مولفه دوم) هر بردار، مختصه عرض (جهت عمودی) آن می باشد.

نمایش مختصاتی:

مثال: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ (b_1 مختصه اول و طول است b_2 – مختصه دوم و عرض است)

صفحه مختصات:

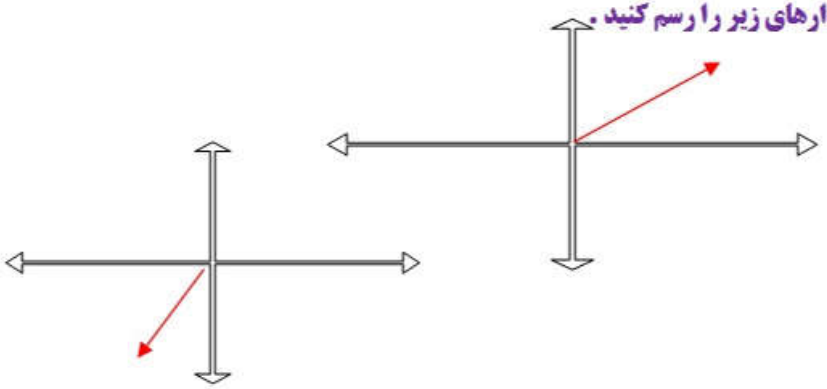
در صفحه مختصات ، حرکت در سمت راست و بالا را مثبت و حرکت به سمت چپ و پایین را منفی در نظر می گیریم

رسم یک بردار با توجه به مختصات آنها:

ابدا یک نقطه را به صورت دلخواه مشخص می کنیم . از این نقطه با توجه به مختصات بردار ابتدا به اندازه مختصه طول ،(جهت افقی) نسبی به اندازه مختصات عرض فاصله میگیریم و این نقطه را مشخص میکنیم. حالا از نقطه اول به نقطه دوم یک پاره خط جهت دار رسم می کنیم که همان بردار مدنظر می باشد

مثال بردارهای زیر را رسم کنید .

$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

دوبردار مساوی مساوی (هم سنگ):

دو بردار وقتی مساویند که هم جهت، هم اندازه و موازی باشند. (کاملا شبیهند فقط جابه جا شده اند)

بردار قرینه:

دو بردار در صورتی قرینه هستند که هم اندازه و موازی ولی در خلاف جهت هم باشند

تساوی دو بردار (مساوی بودن) در حالت مختصاتی:

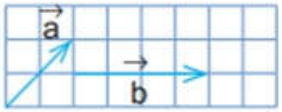
تدوبردار زمانی باهم مساویند که طول های آنها با هم و عرض های آنها هم باهم مساوی باشند

مثلا $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

نکته :

حاصل جمع هر بردار با قرینه اش برابر با بردار صفر است:

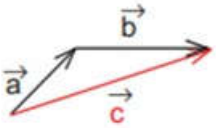
جمع بردارها (بر آیند بردارها) :



برای جمع دو بردار از دو روش استفاده می شود:

۱)روش مثلثی :

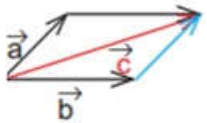
اگر دو بردار پشت سر هم باشند از این روش استفاده می شود و در این روش برای برآیند بردارها از ابتدا بردار اولی به انتها بردار دومی رسم می شود.



مانند:

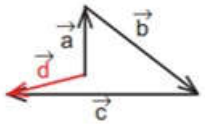
۲)روش متوازی الاضلاع :

اگر دو بردار پشت سر هم نباشند از انتهای یکی از دو بردار مساوی بردار بعدی رسم کرده تا دو بردار پشت سرهم شوند و در آخر از ابتدا دو بردار به انتهای بردار جدید رسم می کنیم.مانند:



مثال : حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

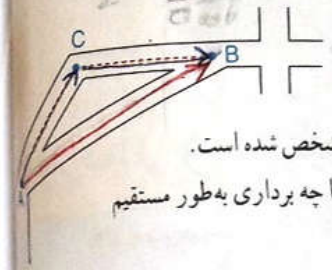
(بردارهای مساوی با هر بردار طوری رسم می کنیم که بردارها پشت سرهم باشند:)



$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

جمع بردارها

فعّالیت

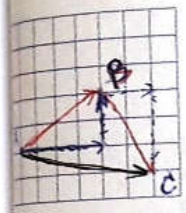


۱ـ شخصی درنقطهٔ A ایستاده است.

مسیرحرکت او برای رسیدن به نقطهٔ B در شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به‌طور مستقیم به نقطهٔ B می‌رسد؟ آن را رسم کنید.

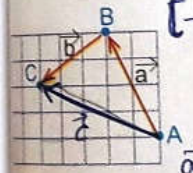
۲ـ روباتی فقط به‌صورت افقی یا عمودی حرکت می کند.



این روبات اکنون روی نقطهٔ A است. با فرمان $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ ابتدا ۴ واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می کند. نقطهٔ جدید را B نام‌گذاری کنید.

روبات ما با فرمان $\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ از B به نقطهٔ C می‌رسد.

با چه فرمانی به‌طور مستقیم از نقطهٔ A به C می‌رسد؟ $\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}$



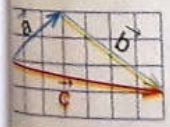
۳ـ نقطهٔ A ابتدا با بردار انتقال a به نقطهٔ B و سپس با بردار انتقال b به نقطهٔ C منتقل شده است. نقطهٔ A با چه برداری به‌طور مستقیم به نقطهٔ C منتقل می‌شود؟ اگر بردار AC را $\vec{c}$ بنامیم

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}=\begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix}$

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توانیم بگوییم بردار c کارِ دو بردار انتقال a و b را انجام می‌دهد؟ به بردار c بردار برایند یا حاصل جمع می گویند.

نکته: انتهای بردار جایی است که عملی دارد. ابتدای بردار جایی است که عملی ندارد.

۴ـ مختصات بردارهای a، b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع دو بردار a و b برابر است؟ بله به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید.



برداری که از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $\vec{b}$ رسم می‌شود (بردار c) برابر است با: برابر با ابتدای بردار $\vec{a}$ و انتهای بردار b است

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجهٔ جمع دو بردار a و b ، بردار c است؛ بنابراین، می‌توان یک تساوی برداری به‌صورت $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ را نوشت.

با توجه به تساوی $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ می‌توان مختصات بردار c را از تساوی مختصاتی زیر به‌دست آورد:

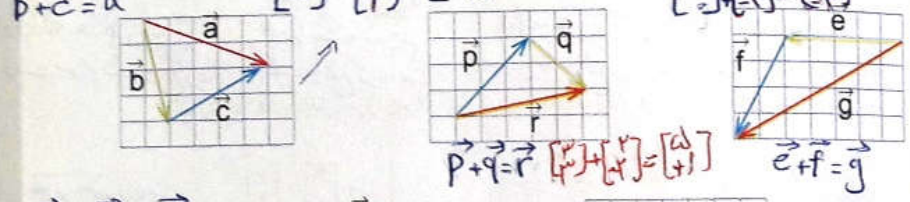
$$\overset{\vec{a}}{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}+\overset{\vec{b}}{\begin{bmatrix}z\\t\end{bmatrix}}=\overset{\vec{a}+\vec{b}}{\begin{bmatrix}x+z\\y+t\end{bmatrix}}$$

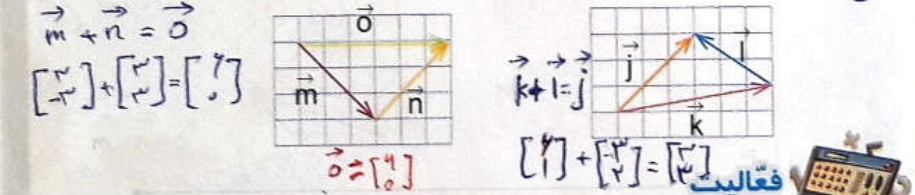
بردار $\vec{c}$ برداری است که مختصات آن جمع دو مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

کار در کلاس

در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به‌صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد برای رسم حاصل جمع یا برایند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم.

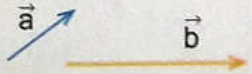
ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است؛ سپس برای هر شکل، یک جمع‌برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.





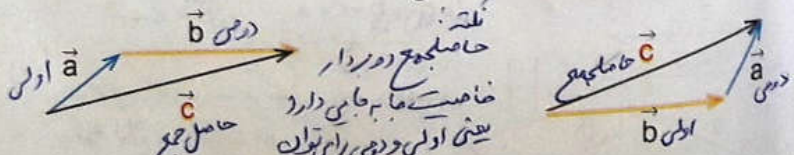
فعّالیت

۱ـ چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همهٔ بردارها را بنویسید.



۲ـ با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای a و b را رسم کنیم. یعنی خاصیت جابه جایی دارد.

راه‌حل‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.



نکته: حاصل جمع دو بردار خاصیت جابه جایی دارد یعنی اولی و دومی را می‌توان جابه جا کرد.

امیر: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

اول $\vec{a}$ را رسم کرده بعد b را رسم کرده

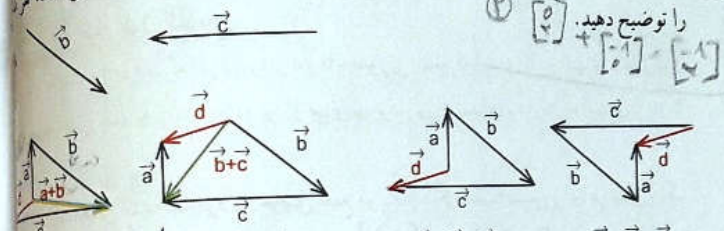
رضا: $\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$

اول $\vec{b}$ را رسم کرده بعد $\vec{a}$ را از انتهای b رسم کرده

حاصل جمع بردارها در حالت مختلف یکی است که طول بردارها را با هم و عرض‌ها را با هم جمع کنیم

مثال: حاصل جمع بردارهای زیر را پیدا کنید

۳ـ دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار، راه‌حل‌های زیر را ارائه کرده‌اند. هر یک را توضیح دهید.



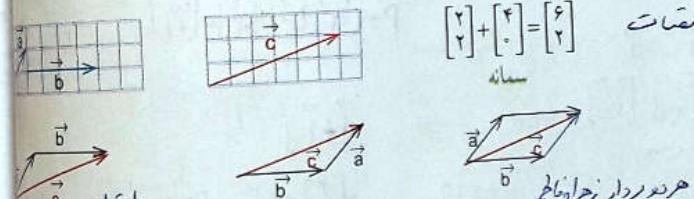
$(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}$ — محمد: اول $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورده سپس با $\vec{a}$ جمع کرده است.

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ — به ترتیب: حمید: هم راست سرهم کشیده و جمع کرده است.

$\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}$ — رضا: اول $\vec{c}$ بعد $\vec{b}$ و بعد $\vec{a}$ راست سرهم کشیده و جمع کرده است.

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ — سعید: اول حاصل $\vec{a}+\vec{b}$ را به دست آورده و سپس آن را با $\vec{c}$ جمع کرده است.

۴ـ راه‌حل‌های دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار a و b را مشاهده و مقایسه کنید.



جمع مختصات $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$

سمانه: رسم هر دو بردار زهرا و فاطمه

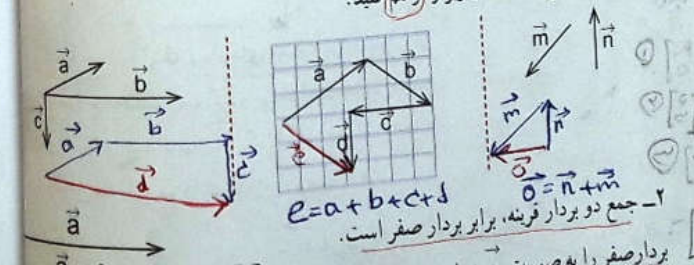
مریم: رسم هر دو بردار زهرا و فاطمه

زهرا: اول $\vec{b}$ در ادامه آن $\vec{a}$ رسم شده

فاطمه: ابتدا $\vec{a}$ رسم شده سپس از انتهای آن $\vec{b}$ رسم شده است

کار در کلاس

۱ـ حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



$e=a+b+c+d$

$\vec{o}=\vec{n}+\vec{m}$

۲ـ جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.

بردار صفر را به صورت $\vec{o}$ نشان می‌دهیم و مختصات آن $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ است.

حاصل جمع بردارهای a، b و c چیست؟ چرا؟

e قرینه مجموع دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ است که آن را خنثی می‌کند و حاصل $\vec{o}$ (صفر) می‌شود.

حاصل جمع چند بردار، برداری است که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم می‌شود.

فعّالیت

۱ـ دو بردار در راستاهای آبی‌رنگ رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار **تجزیه بردار** می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به‌دست آورد؟ چرا؟ بی‌نهایت

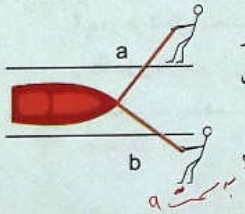
از نوک فلش (بردار) دو خط به موازات خط‌های آبی می‌کشیم هر جا خط‌های آبی قطع شد فلش می‌کشیم. دو بردار که به دست می‌آید تجزیه‌شده بردار مورد نظر است. — یعنی اگر آن دو بردار آبی را با هم جمع کنیم بردار مورد نظر می‌شود.

۲ـ مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ باشد، بنویسید. $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟ بی‌نهایت

$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

تمرین

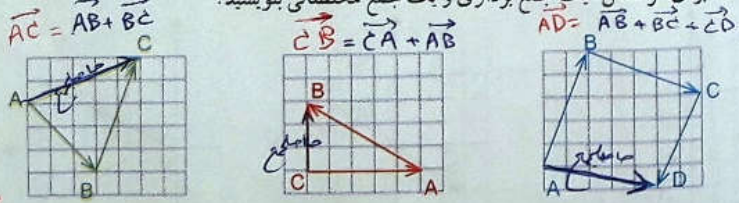


۱ـ دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب، قایقی را در خلاف جهت آب می‌کشند. الف) قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟ به جلو

ب) اگر نیروی a بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟ به سمت a

۲ـ در هر شکل یکی از بردارها، حاصل جمع بردارهای دیگر است.

برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$ $\vec{CB}=\vec{CA}+\vec{AB}$ $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$

۳ـ در هر تساوی، x و y را به‌دست آورید. هم از راه حدس و هم از راه معادله می‌توان x و y را پیدا کرد.

$\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\y\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}x+1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\y-1\end{bmatrix}$

$x=-3$, $y=6$ $x=4$, $y=-6$

تذکر: اگر برداری را از نقطه A به نقطه B در نظر بگیریم این بردار را به صورت زیر نمایش می‌دهیم $\vec{AB}$ $\begin{bmatrix}3\\-7\end{bmatrix}$

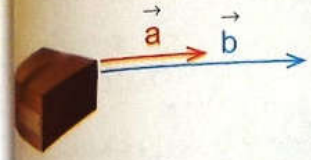
حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید

ضرب عدد در بردار

فعّالیت

۱ــ در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کند، بردار حرکت جدید را رسم کنید.

۲ــ دو نفر سعی می‌کنند جعبه روبه‌رو را بکشند و به‌جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می‌کند با بردار a و نیروی نفر دوم با بردار b نمایش داده شده است.



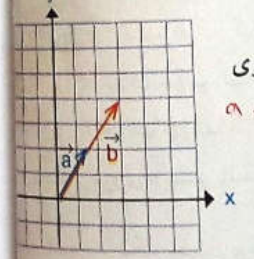
با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول است؟ چرا؟

دو برابر است با توجه به اندازه بردار می‌توان فهمید که دو برابر $\vec{a}$ است.
(طول بردار نشان دهنده مقدار و قدرت بردار است)

۳ــ در فعّالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازهٔ آن‌ها چه نکاتی را رعایت کردید؟

۱- بردار نو باید خلاف جهت، هم راستا و سه برابر بردار اولی باشد
۲- بردار هم راستا و هم جهت بردار اولی

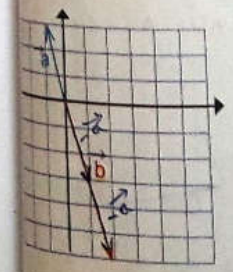
۴ــ در هر شکل، مختصات بردارهای a و b را بنویسید.



رابطهٔ دو بردار a و b را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.

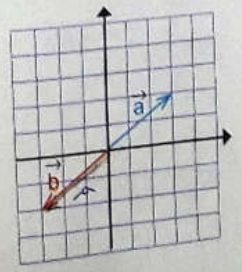
$\vec{b}=2\vec{a}$ یا $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1.5\\2\end{bmatrix}$



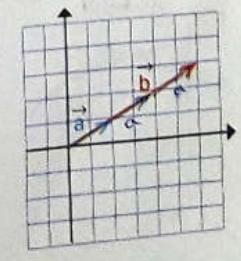
$\vec{b}=-2\vec{a}$

$\begin{bmatrix}-6\\-8\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$



$\vec{b}=-a$

$\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$



$\vec{b}=3a$

$\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

ضرب عدد در بردار: آن عدد هم در طول و هم در عرض، ضرب می‌شود

$3\times\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-6\end{bmatrix}$

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.
بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

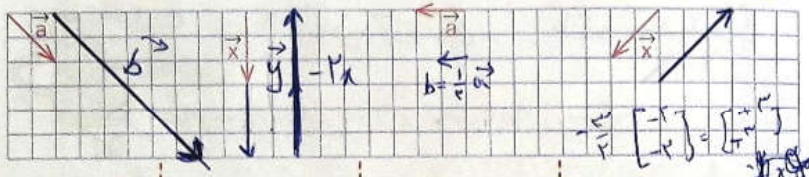
$$k\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$$

اگر بردار b قرینهٔ بردار a باشد، می‌نویسیم: $\vec{b}=-\vec{a}$ یا $\vec{b}=(-1)\vec{a}$

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\rightarrow\vec{b}=-\vec{a}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$$

کار در کلاس

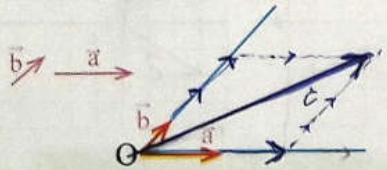
با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



$\vec{b}=3\vec{a}$ | $\vec{y}=-2\vec{x}$ | $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}$ | $\vec{y}=-\frac{3}{2}\vec{x}$

فعّالیت

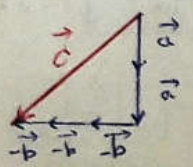
۱ــ بردارهای a و b مفروض‌اند.
بردار $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ را رسم کنید.



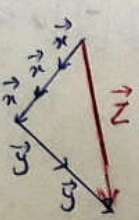
از نقطهٔ دلخواه O بردارهای 2a و 3b را رسم کنید؛ سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

۲ــ بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}=2\vec{a}+(-3\vec{b})$

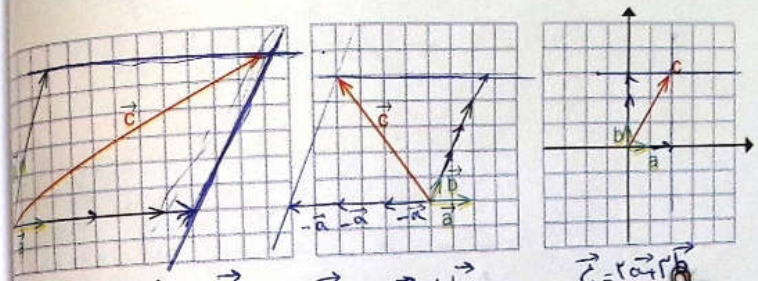


$\vec{z}=3\vec{x}+2\vec{y}$



کار در کلاس

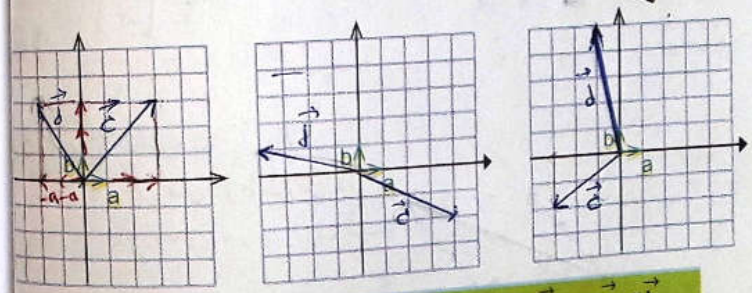
در هر شکل، بردارِ c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.



$\vec{c} = 2.5\vec{a} + 2\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{c} = -3\vec{a} + 5\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

تمرین

۱ـ با توجه به بردارهای a و b، بردارهای c و d را رسم کنید.



$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$

$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$

۲ـ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$(-1)\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\-10\end{bmatrix}$

$(-4)\begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+20\\-28\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\-29\end{bmatrix}$

$(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix}12\\-8\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{12}{2}\\+4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}42\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\+4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}42\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}36\\22\end{bmatrix}$

۳ـ معادله‌های مختصات زیر را حل کنید.

$-3x = \begin{bmatrix}15\\-9\end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix}\frac{12}{-3}\\\frac{-8}{-3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

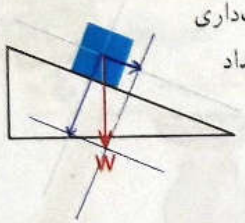
$x = \begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix}-7\\1\end{bmatrix}$

۴ـ در شکل روبه‌رو، نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب‌داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید.



۵ـ با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به‌دست آورید.

$\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{a} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

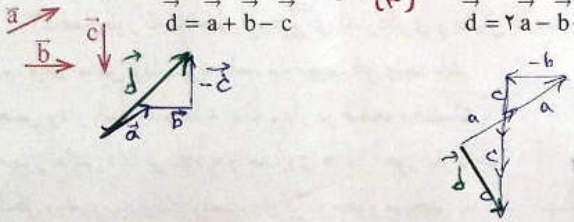
$\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$

$\vec{c} = -3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{c} = 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{c} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

۶ـ با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.

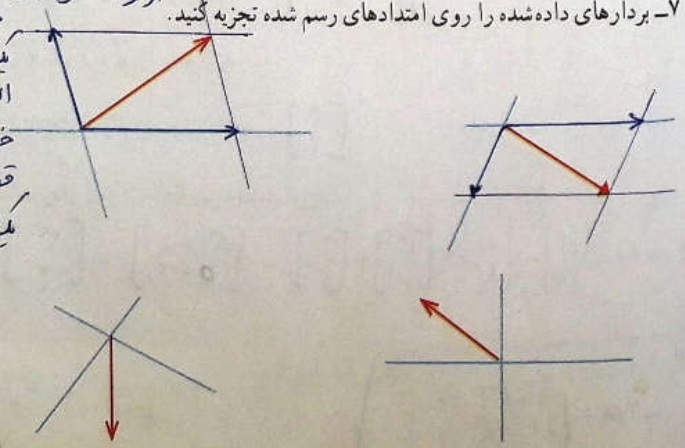
$\vec{c} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+6\\-5\end{bmatrix}$

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ $\qquad$ $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$



۷ـ بردارهای داده‌شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.

از نوک خط قرمز به موازات (موازی) خط‌های آبی، دو خط بکشید (شکل جدید متوازی‌الاضلاع می‌شود) هرجا که خط شما خط آبی را قطع کرد همانجا خط بکشید.



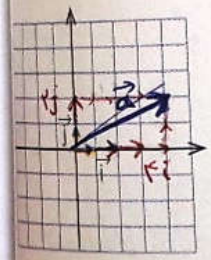
فعّالیت

۱ـ برای اندازه‌گیری هر یک از مقدارهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنید.

طول: متر جرم: کیلوگرم دما: سانتی‌گراد زاویه: درجه زمان: ثانیه

۲ـ در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای ۲ و ۱ـ را روی محور مشخص کنید.

۳ـ همان‌طور که ملاحظه کردید برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم. برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحهٔ مختصات با دو محور نمایش داده می‌شود به واحد روی هر دو محور نیاز داریم.



در شکل روبه‌رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده‌اند.

- مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
- بردار $\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}$ را رسم کنید.
- مختصات بردار a را بنویسید. $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$
- مختصات بردار a را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید.

$$\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0\\0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}36\\22\end{bmatrix}$

در ادامه صفحه

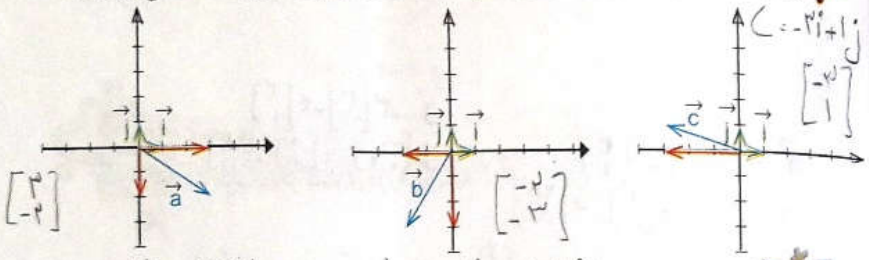
$-2x=\begin{bmatrix}1+4\\-1-2\end{bmatrix}$

$-2x=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$

$x=\begin{bmatrix}\frac{5}{-2}\\\frac{-3}{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.5\\1.5\end{bmatrix}$

کار در کلاس

در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



$c=-2i+j$ $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

$b=-2i+(-3)j$ $\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}$

$a=3i+(-2)j$ $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

فعّالیت

۱ـ طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}=-2i-2j$ $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=-1i+3j=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}$

$3\vec{i}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ $2\vec{i}-3\vec{j}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ $2\vec{i}-\vec{j}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ $\vec{i}+\vec{j}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

۲ـ دو دانش‌آموز، معادلهٔ برداری زیر را حل کرده‌اند. مراحل راه‌حل آنها را با هم مقایسه کنید.

راه حل سعید	راه حل حمید
مختصاتی $3i+j+2\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$	جبری $3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+2\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$	$3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{x}=-5\vec{i}+\vec{j}$
$2\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	$2\vec{x}=-5\vec{i}+\vec{j}-3\vec{i}-\vec{j}$
$2\vec{x}=\begin{bmatrix}-8\\0\end{bmatrix}$	$2\vec{x}=-8\vec{i}$
$\vec{x}=\begin{bmatrix}-4\\0\end{bmatrix}$	$\vec{x}=-4\vec{i}$

۳ـ معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}-2\vec{x}=\vec{i}-\vec{j}$

$\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}-2x=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$-2x=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$

$2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{x}=\begin{bmatrix}-6\\3\end{bmatrix}$

$2i-j+3x=-6i+3j$

$2i-j+3x=-6i+3j$

$3x=-8i+4j \Leftarrow x=\frac{-8}{3}i+\frac{4}{3}j$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

کار در کلاس

اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ باشد، مختصات بردارهای x و y را به‌دست آورید.

$\vec{x} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$

$\vec{x} = 5\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix}$

$\vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$

$\vec{y} = -3\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$

تمرین

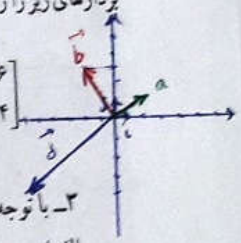
۱ـ طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} =$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ +5 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$ $\vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\vec{i}$ $\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{j}$

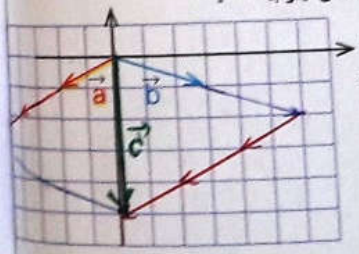
۲ـ دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$



۳ـ با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.

الف) رسم شکل و نوشتن مختصات $\vec{c}$ از روی شکل



$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

ب) پیدا کردن مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و قرار دادن آنها در تساوی زیر.

$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

ویژگی‌های هر روش را بیان کنید. به آسانی و سادگی بردار c مشخص می‌شوند ولی ممکن است خطای بوجود آید

کدام روش برای رایانه‌ای شدن مناسب‌تر است؟ چرا؟ در روش اول روش دوم، چون محاسبه برای رایانه راحت‌تر است

یا دیدن رخ دهد و جای زیادی هم می‌گیرد.

در روش دوم حل آن کوتاه است ولی ممکن است خطای محاسباتی رخ دهد.

$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$

$2\vec{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$2\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$2\vec{x} = \begin{bmatrix} 6+1+0 \\ -3-2+1 \end{bmatrix}$

$2\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{4}{2} \end{bmatrix}$

حل در بالای صفحه

۴ـ با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

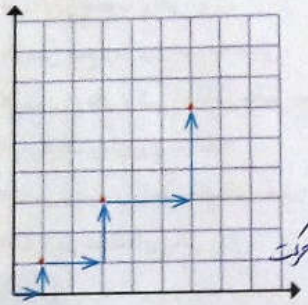
طول	+	−	+	−
عرض	+	+	−	−
شکل تقریبی	↗	↖	↘	↙

۵ـ اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، بردار x را از معادلهٔ زیر پیدا کنید.

$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b}$

۶ـ یک روباتِ برنامه‌ریزی شده به‌صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می‌کند.

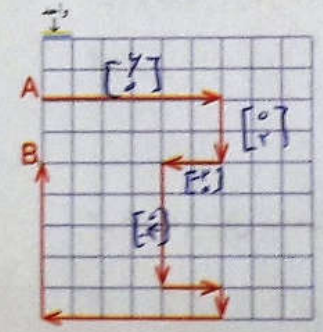


با مشاهدهٔ سه حرکت اولِ این روبات، الگویی برای حرکت آن کشف کنید و توضیح دهید. روبات پس از حرکت پنجم به کدام نقطه می‌رسد؟ به نقطه $\begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$ می‌رسد

شماره حرکت	۱	۲	۳	۴	۵
مختصات	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$
		$1+2$	$1+2+3$	$1+2+3+4$	$1+2+3+4+5$

۷ـ حمیده با خود فکر می‌کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همهٔ آنها بزرگ‌تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید. خیر ممکن است کوچکتر باشد.

۸ـ در صفحهٔ شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطهٔ A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطهٔ B برسد؛ در کل به اندازهٔ چند واحد حرکت کرده است؟ ۲۸ واحد



خودرو از نقطهٔ A به B در راستای عمودی چند واحد جابه‌جا شده است؟ ۲ـ واحد در راستای عمود ـ یعنی ۳ واحد پایین آمده است.

$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$